UNIDAD DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS - GRADO 11°

TEMA: FUNCIONES

Conocimientos previos:

Conjuntos numéricos, números reales y la recta real, desigualdades, intervalos, inecuaciones, valor absoluto, solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, factorización, función, dominio, rango, representación gráfica en el plano cartesiano.

Serán trabajados en un tiempo de 9 semanas. Trabajados así: Temas serán trabajados por sesiones, una sesión con un tiempo de 5 horas por semana.

https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf

Usaremos ese libro para resolver los talleres y revisar la teoría. Son los mismos que están en la institución.

Algunos ejemplos fueron tomados de la siguiente página, en ella encontraras más ejemplos y temas para complementar.

http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones/ind_funciones.html

OBJETIVOS:

Reconocer la importancia del concepto de función dentro de la matemática y su utilización para modelar situaciones de la vida diaria.

Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas de las gráficas de algunas funciones.

Reconocer las propiedades de diferentes tipos de funciones

Realizar operaciones entre funciones y construir gráficas.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE:

Se tiene en cuenta los temas trabajados en el primer periodo que son aplicados en todos los temas de esta unidad, también los temas de años anteriores como son: factorización, operaciones entre los números reales como suma, diferencia, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Para tener una comprensión de los temas se desarrollarán las explicaciones pertinentes y se apoyara en talleres para una ejercitación de las temáticas. Se complementan con videos los cuales serán una manera de complementar las explicaciones.

La actitud frente al trabajo en clase será tenidos presentes al momento de evaluar la asignatura. Mostrar responsabilidad y respeto. Colaborar entre los compañeros que presentes dificultades y preguntar en las clases para aclarar dudas y que sirva de apoyo para todo el grupo.

Actuar de manera honesta en la presentación de trabajos y evaluaciones.

Entregarán los ejercicios que sean asignados, los demás serán de ejercitación.

Funciones

- **Algebráicas**
  - **Polinómicas:** $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x -$
  - **Racionales:** $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2-1}$
  - **Irracionales:** $f(x) = \sqrt{x^2+9}$
- **Transcendentes**
  - **Exponenciales:** $f(x) = 3^x$
  - **Logarítmicas:** $f(x) = \log_5 x$
  - **Trigonométricas:** $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
- **A trozos** $f(x)= |x|$

LAS FUNCIONES REALES:

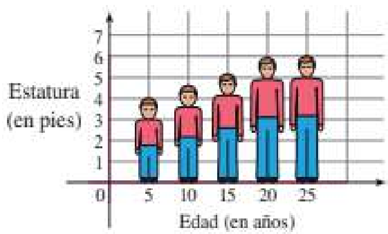
(sección:1 y 2- 5 horas semanales, total 10 horas)

¿Qué es una Función?

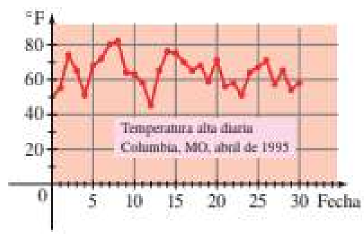
En casi todo fenómeno físico se observa que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura depende de la edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso (véase figura 1). Se usa el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra. Es decir, se expresa lo siguiente:

- La altura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.

La Oficina Postal de Estados Unidos emplea una regla simple para determinar el costo de enviar un paquete con base en su peso. Pero no es fácil describir la regla que relaciona el peso con la edad o la temperatura con la fecha.



La estatura es una función de la edad.



La temperatura es una función de la fecha.

w (onzas)	Franqueo (dólares)
$0 < w$ 1	0.37
$1 < w$ 2	0.60
$2 < w$ 3	0.83
$3 < w$ 4	1.06
$4 < w$ 5	1.29
$5 < w$ 6	1.52

El franqueo es una función del peso.

ura 1

¿Puede pensar en otras funciones? Aquí hay algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es una función del tiempo.
- El peso de un astronauta es una función de su elevación.
- El precio de un artículo es una función de la demanda de ese artículo.

Definición de función

Antes se emplearon letras para representar números. Aquí se hace algo muy diferente. Se emplean letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "cuadrado del número"

Cuando se escribe $f(2)$, se entiende "aplicar la regla f al número 2". Al aplicar la regla se obtiene $f(2) = 2^2 = 4$. De manera similar, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

Definición de función

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B.

Ejemplo 1 La función cuadrática

La función cuadrática asigna a cada número real x su cuadrado x^2. Se define por

$$f(x) = x^2$$

a) Evaluar $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

b) Hallar el dominio y el rango de f.

c) Trazar el diagrama de máquina para f.

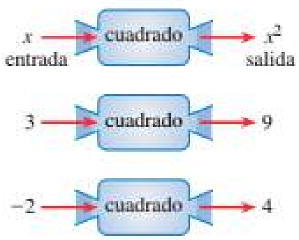


Figura 5

Diagrama de máquina

Solución

a) Los valores de f se hallan al sustituir x en $f(x) = x^2$.

$$f(3) = 3^2 = 9 \qquad f(-2) = (-2)^2 = 4 \qquad f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$$

b) El dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. El rango de f consiste en los valores de $f(x)$, es decir, los números de la forma x^2. Puesto que $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, se puede ver que el rango de f es $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$.

c) En la figura 5 se muestra un diagrama de máquina para esta función. ■

Ejemplo 2 Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de función.

a) $f(-2)$ b) $f(0)$ c) $f(4)$ d) $f(\frac{1}{2})$

Solución Para evaluar f en un número, se sustituye x por el número en la definición de f.

a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

c) $f(4) = 3 \cdot 4^2 + 4 - 5 = 47$

d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$ ■

Ejemplo 3 Una función definida por partes

Un teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cada minuto adicional de uso cuesta 20¢. El costo mensual es una función de la cantidad de minutos empleados, y se expresa como

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 39 + 0.2(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Determine $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

Solución Recuerde que una función es una regla. A continuación se explica cómo aplicar la regla para esta función. Primero, se considera el valor de la entrada x. Si $0 \leq x \leq 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otro lado, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.2(x - 400)$.

Puesto que $100 \leq 400$, se tiene $C(100) = 39$

Puesto que $400 \leq 400$, se tiene $C(400) = 39$

Puesto que $480 > 400$, se tiene $C(480) = 39 + 0.2(480 - 400) = 55$.

Por lo tanto, el plan carga \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos. ■

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de las entradas para la función. El dominio de una función se puede expresar de forma explícita. Por ejemplo, si se escribe

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 5$$

entonces el dominio es el conjunto de los números reales para los cuales $0 \leq x \leq 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se enuncia de manera explícita, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica —es decir, el conjunto de los números reales para los que la expresión se define como un número real*. Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de las expresiones algebraicas se describen en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, así que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, así que su dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$.

Ejemplo 6 Determinación de dominios de funciones

Halle el dominio de cada función..

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ c) $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$

Solución

a) La función no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

se puede observar que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Así, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio se puede escribir en notación de intervalo como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

b) No se puede sacar la raíz cuadrada de una cantidad negativa, así que se debe tener $9 - x^2 \geq 0$. Con los métodos de la sección 1.7, se puede resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Así, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

c) No se puede sacar la raíz cuadrada de un número negativo, y tampoco se puede dividir entre cero, así que se debe tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

■

Cuatro formas de representar una función

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es la "población del mundo en el instante t"

Relación de la población P y el tiempo t

Algebraica

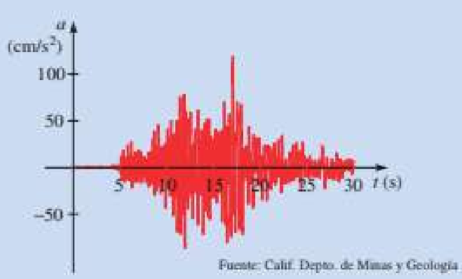
Por medio de una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Por medio de una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Por medio de una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
⋮	⋮

Costo de enviar una carta por correo de primera clase

Taller N°1: Funciones

1–4 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "eleve al cuadrado, luego reste 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

1. Sume 5, luego multiplique por 2

2. Divida entre 7, después reste 4

3. Reste 5, luego eleve al cuadrado

4. Saque la raíz cuadrada, sume 8, luego multiplique por $\frac{1}{3}$

5–8 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

5. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$

6. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

7. $h(x) = x^2 + 2$

8. $k(x) = \sqrt{x+2}$

9–10 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

9. $f(x) = \sqrt{x-1}$

10. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

11–12 ■ Complete la tabla.

11. $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

12. $g(x) = |2x + 3|$

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

13–20 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

13. $f(x) = 2x + 1$;

$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

14. $f(x) = x^2 + 2x$;

$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

15. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;

$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

16. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

21–24 ■ Evalúe la función definida por partes en los valores indicados.

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

22. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f\left(-\frac{3}{2}\right), f(-1), f(0), f(25)$

24. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

Taller N°2: Dominio de la Función

37–58 ■ Encuentre el dominio de la función.

37. $f(x) = 2x$

38. $f(x) = x^2 + 1$

39. $f(x) = 2x, \quad -1 \le x \le 5$

40. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 5$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

43. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

45. $f(x) = \sqrt{x-5}$

46. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

47. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

48. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

49. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

50. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

51. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

52. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

53. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

54. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

55. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

56. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

57. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

58. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

GRÁFICA DE FUNCIONES

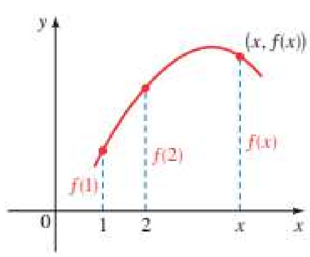


Figura 1
La altura de la gráfica arriba del punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de una función f da un cuadro del comportamiento o "historia de vida" de la función. Se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se llama **función lineal** porque su gráfica es la de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y y-ordenada al origen b. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un determinado número, se llama **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, a saber, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. En la figura 2 se muestran las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.

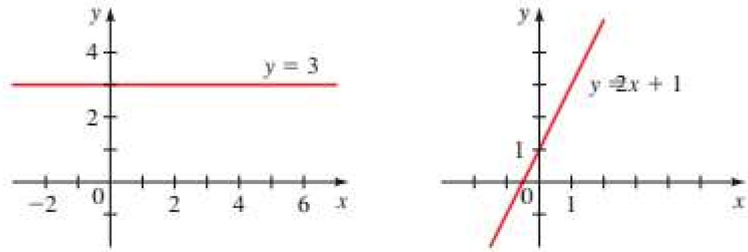


Figura 2 La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

Ejemplo 1 Graficación de funciones

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

Solución Primero se construye una tabla de valores. Luego se grafican los puntos expresados en la tabla y se unen mediante una curva lisa para obtener la gráfica. Las gráficas se bosquejan en la figura 3.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

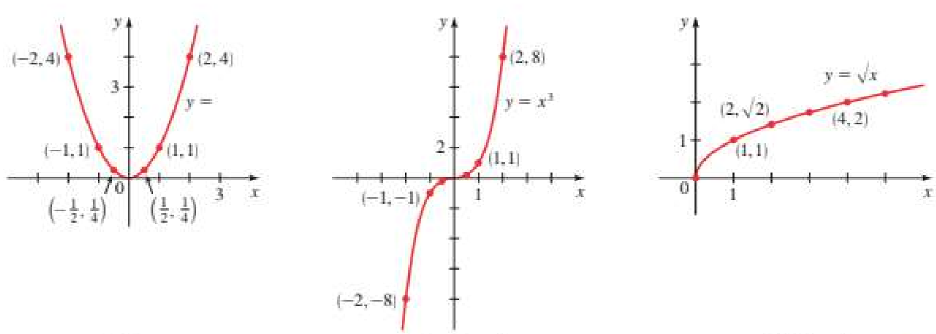


Figura 3 a) $f(x) =$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

Ejemplo 4 Halle el dominio y el rango de una gráfica

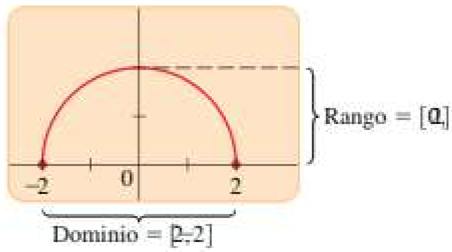
a) Use una calculadora de graficación para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

b) Halle el dominio y el rango de f.

Solución

a) La gráfica se muestra en la figura 7.

Figura 7
Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



b) De la gráfica de la figura 7 se ve que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$.

Graficación de funciones definidas por partes

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en diferentes partes de su dominio. Como se podría esperar, la gráfica de tal función consiste en trozos separados.

Ejemplo 5 Gráfica de una función definida por partes

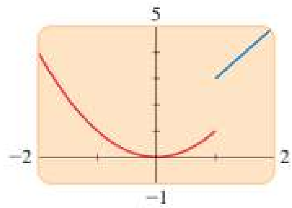
Bosqueje la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$, así que la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que se bosquejó en la figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, de modo que la parte de la gráfica a la derecha

En muchas calculadoras de graficación, la gráfica de la figura 8 se puede producir por medio de funciones lógicas en la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

`Y1 = (X ≤ 1)X^2 + (X > 1)(2X + 1)`



(Para evitar la línea vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot` (punto).)

de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que se grafica en la figura 2. Esto permite trazar la gráfica en la figura 8.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

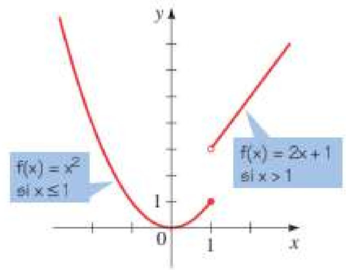


Figura 8

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 6 Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con el mismo método del ejemplo 5, se nota que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase figura 9).

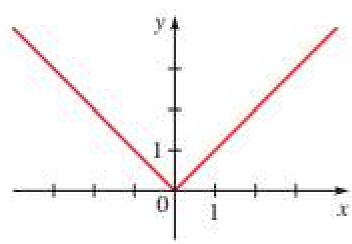


Figura 9
Gráfica de $f(x) = |x|$

La **función máximo entero** se define por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor que o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, $[\![-0.5]\!] = -1$.

Ejemplo 7 Gráfica de la función máximo entero

Bosqueje la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$.

Solución La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Note que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal como se muestra en la figura 10.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

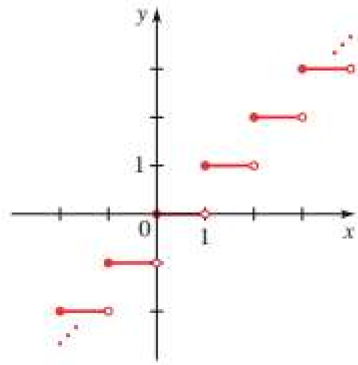


Figura 10
La función máximo entero, $y = [\![x]\!]$ ■

La función máximo entero es un ejemplo de una **función escalón**. En el ejemplo siguiente se da un ejemplo del mundo real de una función escalón.

Ejemplo 8 La función costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica diurna de larga distancia desde Toronto a Mumbai, India, es 69 centavos para el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Dibuje la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como una función del tiempo t (en minutos).

Solución Sea $C(t)$ el costo por t minutos. Puesto que $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información suministrada, se tiene

$$
\begin{aligned}
C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \le 1 \\
C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \le 2 \\
C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \le 3 \\
C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \le 4
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la figura 11. ■

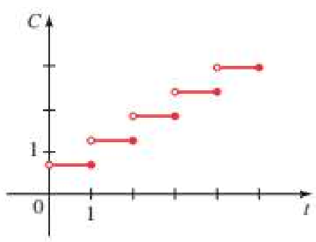


Figura 11
Costo de una llamada de larga distancia

Prueba de la línea vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la prueba siguiente.

Prueba de la línea vertical

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y sólo si ninguna línea vertical corta la curva más de una vez.

Se puede ver de la figura 12 por qué es cierta la prueba de la línea vertical. Si cada línea vertical $x = a$ corta una curva sólo una vez en (a, b), entonces $f(a) = b$ define exactamente un valor funcional. Pero si una línea $x = a$ corta la curva dos veces en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes para a.

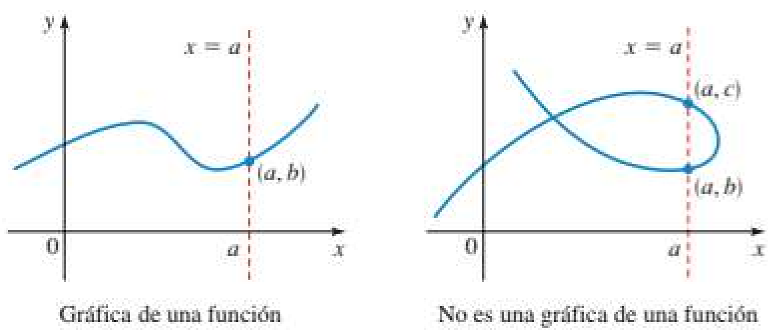
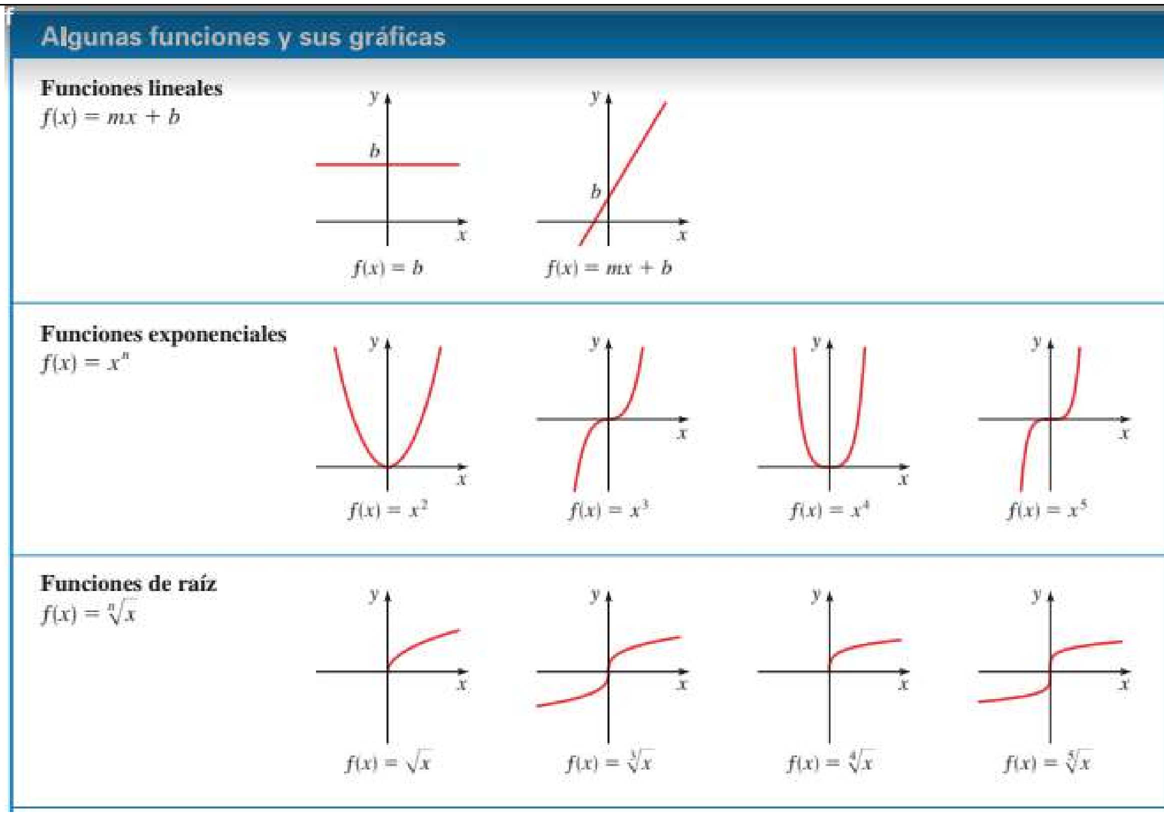
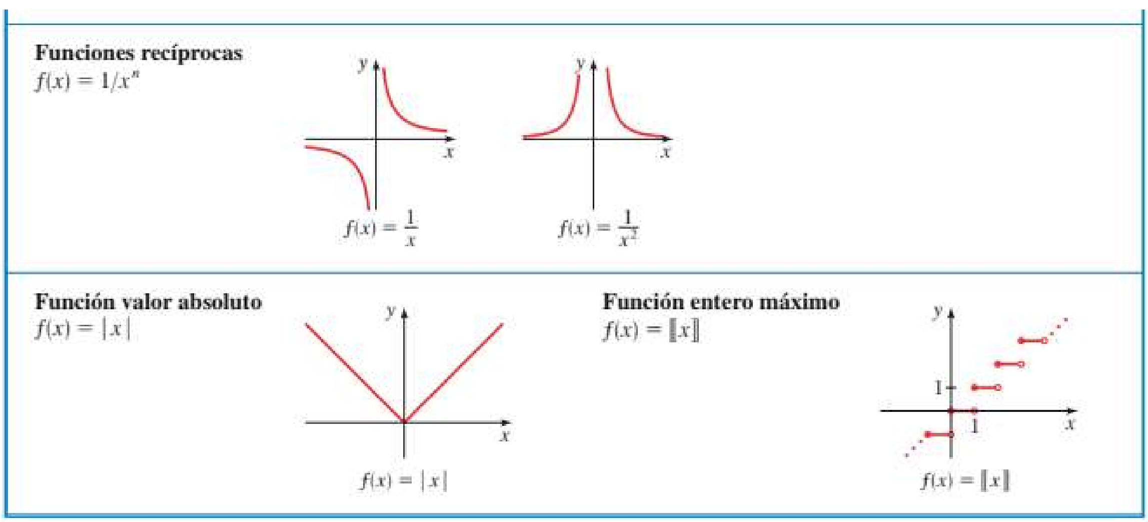


Figura 12
Prueba de la línea vertical





Taller N°3: Gráficas de Funciones construyendo tabla de valores

Realizar los ejercicios:1, 4,11,19,22

Taller N°4: Gráficas de Funciones

Realizar los ejercicios:23,24,25,26,42

1–22 ■ Trace la gráfica de la función construyendo primero una tabla de valores.

1. $f(x) = 2$ **2.** $f(x) = -3$

3. $f(x) = 2x - 4$ **4.** $f(x) = 6 - 3x$

5. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \le x \le 3$

6. $f(x) = \dfrac{x - 3}{2}, \quad 0 \le x \le 5$

7. $f(x) = -x^2$ **8.** $f(x) = x^2 - 4$

9. $g(x) = x^3 - 8$ **10.** $g(x) = 4x^2 - x^4$

11. $g(x) = \sqrt{x + 4}$ **12.** $g(x) = \sqrt{-x}$

13. $F(x) = \dfrac{1}{x}$ **14.** $F(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

15. $H(x) = |2x|$ **16.** $H(x) = |x + 1|$

17. $G(x) = |x| + x$ **18.** $G(x) = |x| - x$

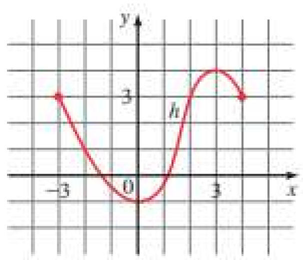
19. $f(x) = |2x - 2|$ **20.** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

21. $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$ **22.** $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

23. Se da la gráfica de una función h.

a) Determine $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.

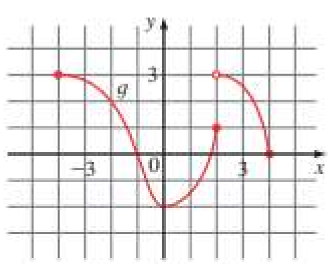
b) Halle el dominio y el rango de h.



24. Se da la gráfica de una función g.

a) Determine $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.

b) Halle el dominio y el rango de g.

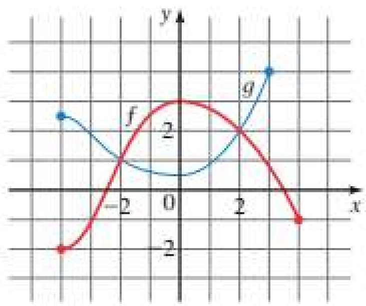


25. Se dan las gráficas de las funciones f y g.

a) ¿Cuál es más grande, $f(0)$ o $g(0)$?

b) ¿Cuál es más grande, $f(-3)$ o $g(-3)$?

c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

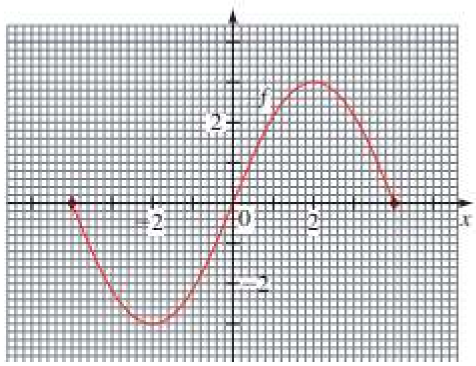


26. Se da la gráfica de la función f.

a) Estime $f(0.5)$ al décimo más próximo.

b) Estime $f(3)$ al décimo más próximo.

c) Encuentre los números x en el dominio de f para los que $f(x) = 1$.



27–36 ■ Se tiene una función f.

a) Emplee una calculadora de graficación para trazar la gráfica de f.

b) Halle el dominio y el rango de f a partir de la gráfica.

27. $f(x) = x - 1$

28. $f(x) = 2(x + 1)$

29. $f(x) = 4$

30. $f(x) = -x^2$

31. $f(x) = 4 - x^2$

32. $f(x) = x^2 + 4$

33. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

34. $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

35. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

36. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

37–50 ■ Bosqueje la gráfica de la función definida por partes.

37. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

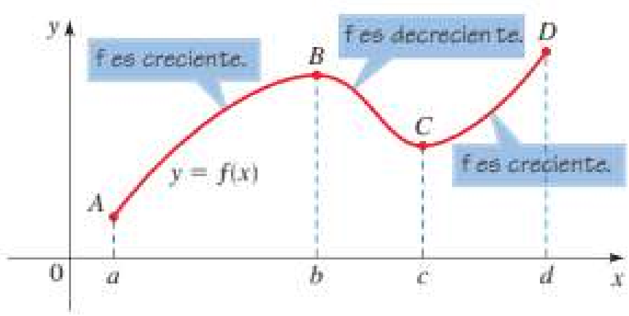
42. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1 \\ 3-x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Funciones crecientes y decrecientes



La gráfica sube desde el punto A al punto B, baja del punto B al punto C, y vuelve a subir de C a D. Se dice que la función f es creciente cuando su grafica sube y decreciente cuando la su gráfica baja.

f es creciente en [a, b] y [c, d]

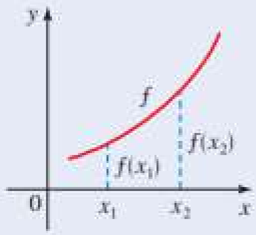
f es decreciente en [b, c]

Se tiene la siguiente definición.

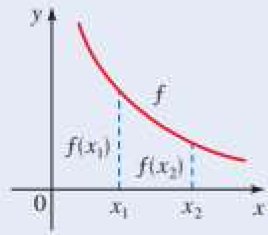
Definición de funciones crecientes y decrecientes

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.



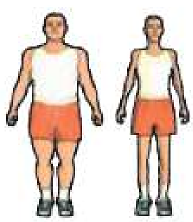
f es creciente



f es decreciente

Ejemplo 1 **Intervalos en los que una función crece y decrece**

La gráfica de la figura 2 da el peso W de una persona a la edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.



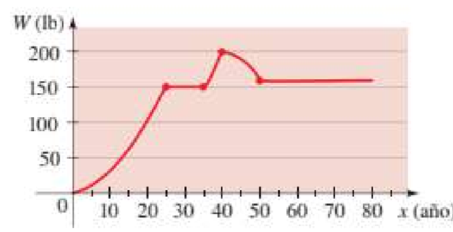


Figura 2
Peso como una función de la edad

Solución La función es creciente en [0, 25] y [35, 40]. Es decreciente en [40, 50]. La función es constante (ni creciente ni decreciente) en [25, 35] y [50, 80]. Esto significa que la persona ganó peso hasta la edad de 25 años, luego ganó peso de nuevo entre los 35 y 40 años. Perdió peso entre los 40 y 50 años. ■

Ejemplo 2 Uso de una gráfica para hallar intervalos donde la función crece y disminuye

a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.
b) Halle el dominio y el rango de la función.
c) Encuentre los intervalos en los que f crece y disminuye.

Solución

a) Se emplea una calculadora de graficación para trazar la gráfica de la figura 3.
b) De la gráfica se observa que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.
c) De la gráfica se ve que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. ■

Algunas calculadoras de graficación, como la TI-82, no evalúan $x^{2/3}$ [introducida como x^(2/3)] para x negativa. Para graficar una función como $f(x) = x^{2/3}$, se introduce como $y_1 = (x\wedge(1/3))\wedge2$ porque estas calculadoras evalúan de manera correcta potencias de la forma $x\wedge(1/n)$. Las calculadoras más recientes, como la TI-83 y la TI-86, no tienen este problema.

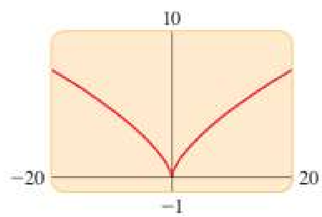
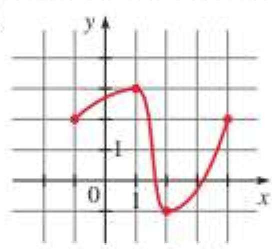


Figura 3
Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

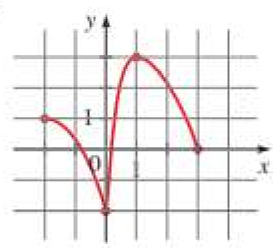
Taller N°5: Funciones crecientes y decrecientes

1–4 ■ Se da la gráfica de una función. Determine los intervalos en los que la función es a) creciente y b) decreciente.

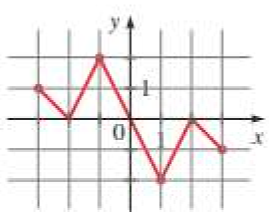
1.



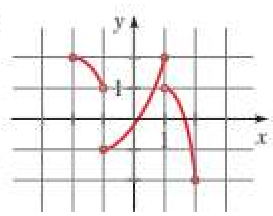
2.



3.



4.



Transformación de funciones

Desplazamiento vertical

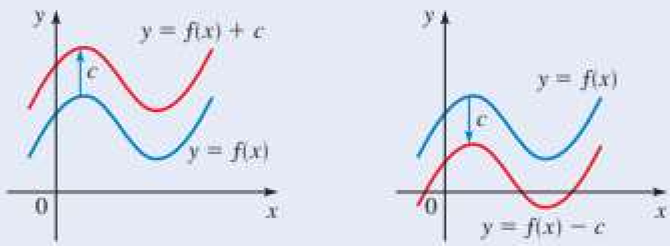
Sumar una constante a una función desplaza su gráfica en dirección vertical: hasta arriba si la constante es positiva y hacia abajo es negativa.

Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

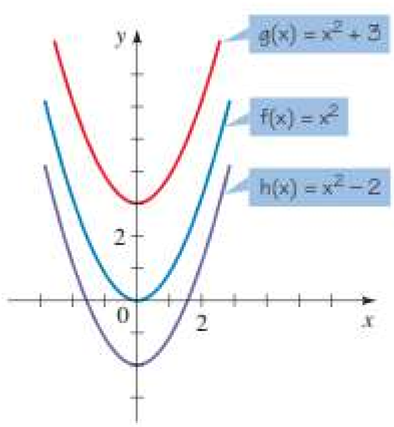
Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.



Ejemplo 1 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^2 + 3$ b) $h(x) = x^2 - 2$

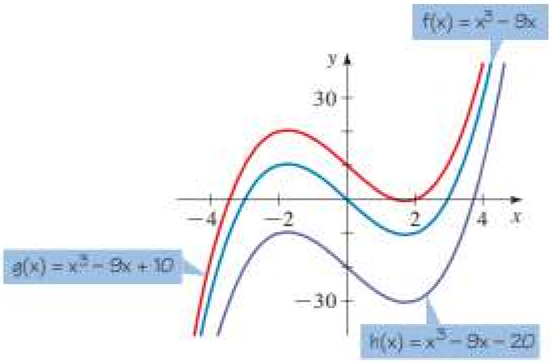


Ejemplo 2 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^3 - 9x$, para bosquejar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^3 - 9x + 10$ b) $h(x) = x^3 - 9x - 20$

Solución.



Desplazamiento horizontal

Suponga que se conoce la gráfica de y= f(x), ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de:

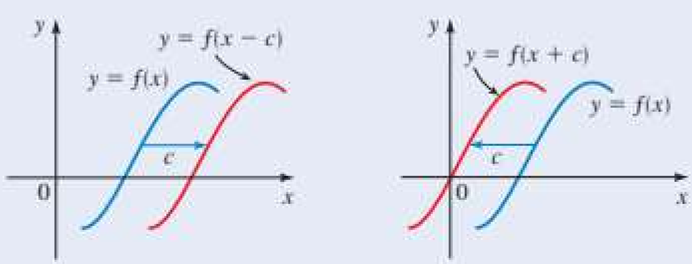
y= f (x +c) y = f (x-c) , (c >0)

Desplazamientos horizontales de gráficas

Supóngase que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.



Ejemplo 3 Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = (x + 4)^2$ b) $h(x) = (x - 2)^2$

Solución

a) Para graficar g, la gráfica de f se desplaza 4 unidades a la izquierda.

b) Para graficar h, la gráfica de f se desplaza 2 unidades a la derecha.

Solución

a) Para graficar g, la gráfica de f se desplaza 4 unidades a la izquierda.

b) Para graficar h, la gráfica de f se desplaza 2 unidades a la derecha.

Las gráficas de g y h se bosquejan en la figura 3.

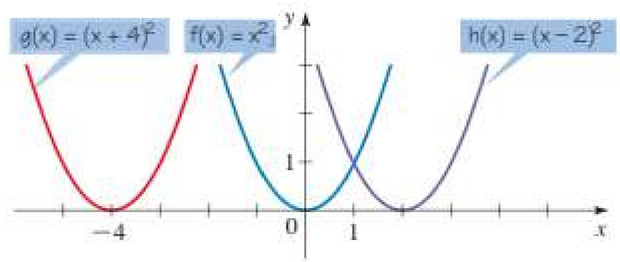


Figura 3

Ejemplo 4 **Combinación de desplazamientos horizontales y verticales**

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$.

Solución Se empieza con la gráfica de $y = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ mostrada en la figura 4.

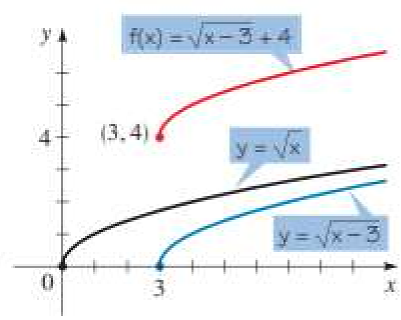


Figura 4

Reflexión de gráficas

Suponga que conoce la gráfica de y = f(x). Para obtenerla gráfica de

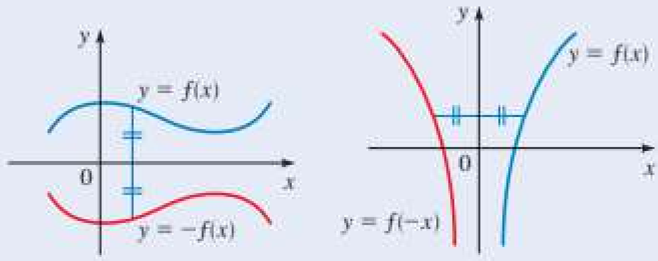
$y = -f(x)$. es el negativo de la coordenada y del punto correspondiente de $y = f(x)$, por ejemplo (2,3) será (2,-3), su reflejo es el eje x

Para graficar $y = f(-x)$ *es*, el negativo de la coordenada x, de $y = f(x)$, por ejemplo (3,5) será (-3,5). Su reflejo el eje y.

Reflexión de gráficas

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.



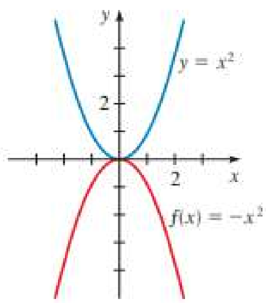


Figura 5

Ejemplo 5 Reflexión de gráficas

Trace la gráfica de cada función

(a) $f(x) = -x^2$ (b) $g(x) = \sqrt{-x}$

Solución

a) Se empieza con la gráfica de $y = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ reflejada en el eje x (véase figura 5).

b) Se inicia con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c) en la sección 2.2). La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ reflejada en el eje y (véase figura 6). Note que el dominio de la función $g(x) = \sqrt{-x}$ es $\{x \mid x \leq 0\}$.

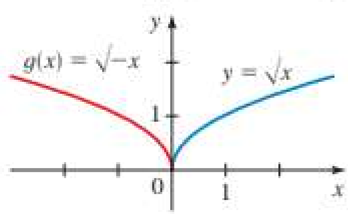


Figura 6

■

Estiramiento y acortamiento vertical

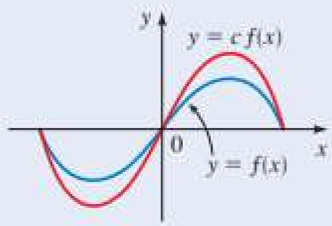
Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se usa para obtener la gráfica de $y = cf(x)$? La coordenada y de $y = cf(x)$ en x es la misma que la coordenada y correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por c. Multiplicar las coordenadas y por c tiene el mismo efecto de alargar y acortar verticalmente la gráfica por un factor de c.

Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

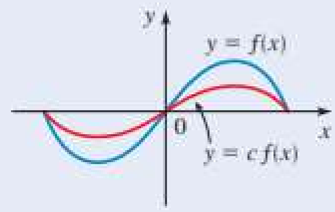
Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.



$c > 1$



$0 < c < 1$

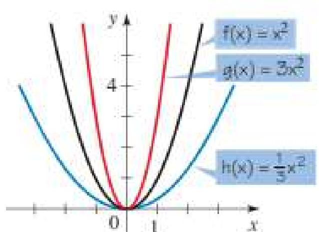


Figura 7

Ejemplo 6 Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 3x^2$ b) $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

Solución

a) La gráfica de g se obtiene al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de f por 3. Es decir, para obtener la gráfica de g se alarga la gráfica de f verticalmente por un factor de 3. El resultado es la parábola más estrecha en la figura 7.

b) La gráfica de h se obtiene al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de f por $\frac{1}{3}$. Es decir, para obtener la gráfica de h se acorta verticalmente la gráfica de f por un factor de $\frac{1}{3}$. El resultado es la parábola más amplia en la figura 7. ■

Ejemplo 7 **Combinación de desplazamiento, estiramiento y reflexión**

Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$.

Solución Comenzando con la gráfica $y = x^2$, se desplaza primero a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = (x - 3)^2$. Luego se refleja en el eje x y se alarga por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$. Por último, se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ mostrada en la figura 8.

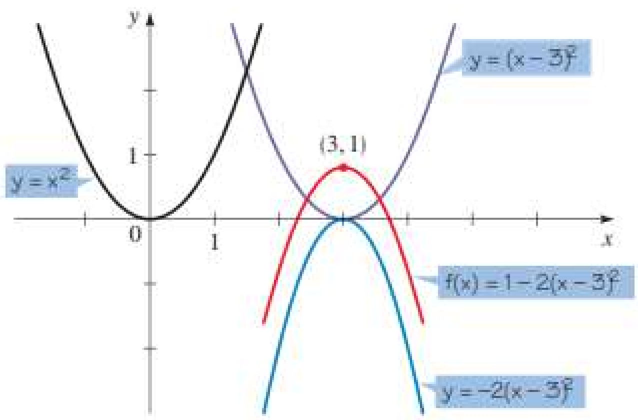


Figura 8

Alargamiento y estiramiento horizontal

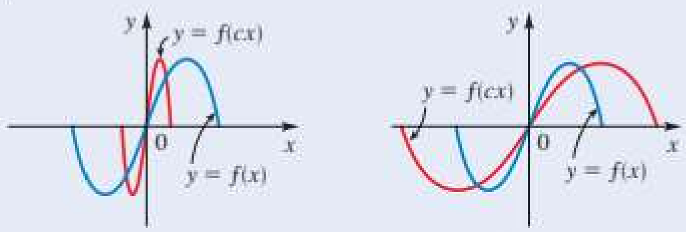
Ahora abordaremos el acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas. Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$, entonces ¿cómo se relaciona la gráfica de $y = f(cx)$ con ésta? La coordenada y de $y = f(cx)$ en x es la misma que la coordenada y de $y = f(x)$ en cx. Así, las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ corresponde a las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicadas por c. Considerado de otro modo, se puede observar que las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, se debe acortar (o alargar) la gráfica horizontalmente por un factor de $1/c$, como se resume en el cuadro siguiente.

Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas

La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.



$c > 1$ $\qquad$ $0 < c < 1$

Ejemplo 8 **Alargamiento y acortamiento horizontal de gráficas**

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 9. Trace la gráfica de cada función.

a) $y = f(2x)$ b) $y = f(\frac{1}{2}x)$

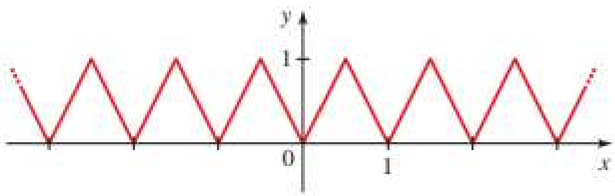


Figura 9
$y = f(x)$

Solución Con base en los principios descritos en el cuadro precedente, se obtienen las gráficas mostradas en las figuras 10 y 11.

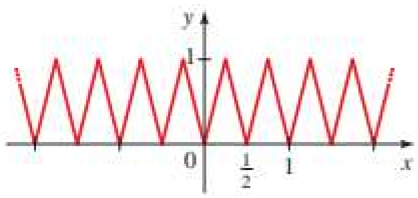


Figura 10
$y = f(2x)$

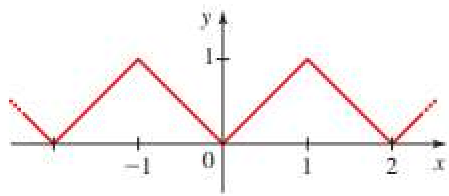


Figura 11
$y = f(\frac{1}{2}x)$ ■

Función par e impar

Si una función f satisface f(-x) = f(x) para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función par.** Por ejemplo, la función

$$f(x) = x^2, es\ par\ por\ que\ f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y (véase figura 12). Esto significa que si se ha trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces se puede obtener la gráfica completa simplemente reflejando esta porción en el eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen (véase figura 13). Si se ha trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces se puede obtener la gráfica completa

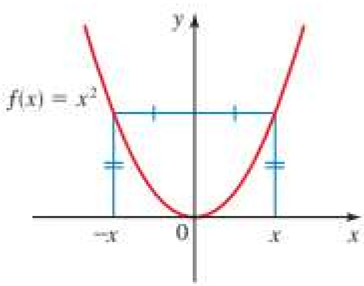


Figura 12
$f(x) = x^2$ es una función par.

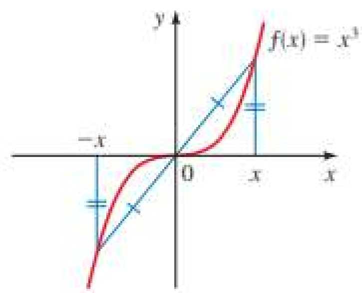


Figura 13
$f(x) = x^3$ es una función impar.

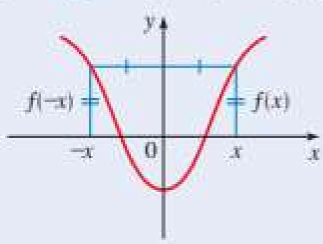
si se gira esta porción 180º respecto al origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje x luego en el eje y.)

Funciones par e impar

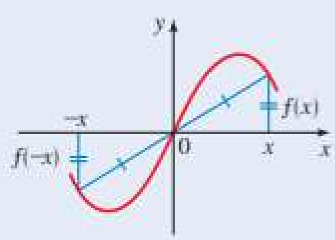
Sea f una función.

f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f



La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.



La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 9 **Funciones par e impar**

Determine si las funciones son par, impar o ni par ni impar.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

Solución

a) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)$

$= -x^5 - x = -(x^5 + x)$

$= -f(x)$

Por lo tanto, f es una función impar.

b) $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

Por lo tanto g es par.

c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Puesto que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar.

Las gráficas de las funciones del ejemplo 9 se muestran en la figura 14. La gráfica de f es simétrica respecto al origen, y la gráfica de g es simétrica con respecto al eje y. La gráfica de h no es simétrica respecto al eje y o al origen.

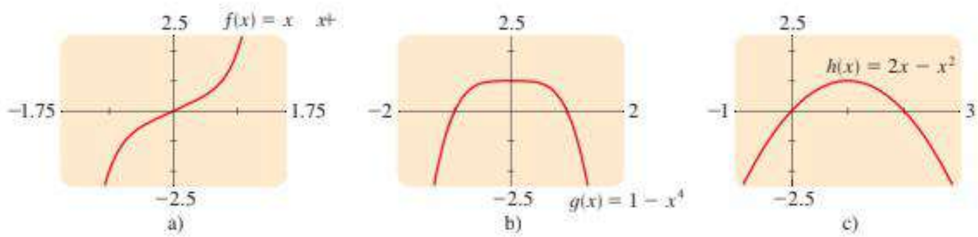


Figura 14

Taller N 6: Transformación de Funciones

Realizar los siguientes ejercicios: 6,8,12,17,20.

1–10 ■ Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada función a partir de la gráfica de f.

1. a) $y = f(x) - 5$ **b)** $y = f(x - 5)$

2. a) $y = f(x + 7)$ **b)** $y = f(x) + 7$

3. a) $y = f(x + \frac{1}{2})$ **b)** $y = f(x) + \frac{1}{2}$

4. a) $y = -f(x)$ **b)** $y = f(-x)$

5. a) $y = -2f(x)$ **b)** $y = -\frac{1}{2}f(x)$

6. a) $y = -f(x) + 5$ **b)** $y = 3f(x) - 5$

7. a) $y = f(x - 4) + \frac{3}{4}$ **b)** $y = f(x + 4) - \frac{3}{4}$

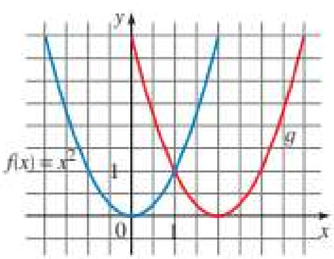
8. a) $y = 2f(x + 2) - 2$ **b)** $y = 2f(x - 2) + 2$

9. a) $y = f(4x)$ **b)** $y = f(\frac{1}{4}x)$

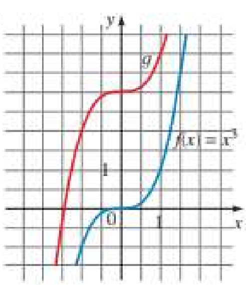
10. a) $y = -f(2x)$ **b)** $y = f(2x) - 1$

11–16 ■ Se dan las gráficas de f y g. Encuentre una fórmula para la función g.

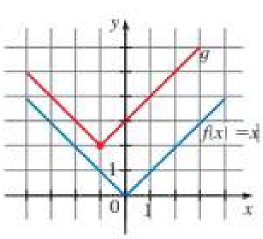
11.



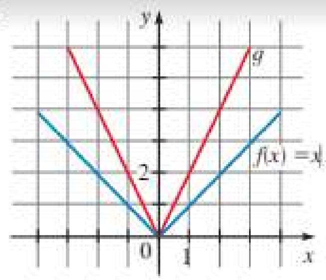
12.



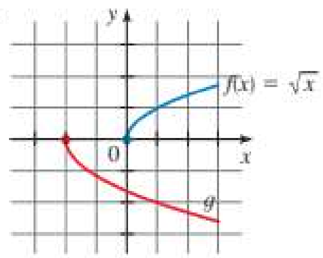
13.



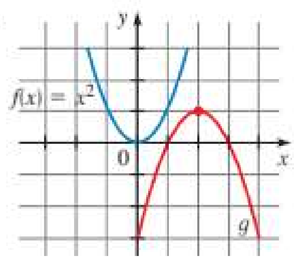
14.



15.



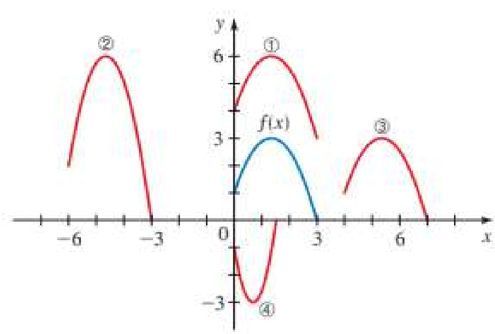
16.



17–18 ■ Se da la gráfica de $y = f(x)$. Compare cada ecuación con su gráfica.

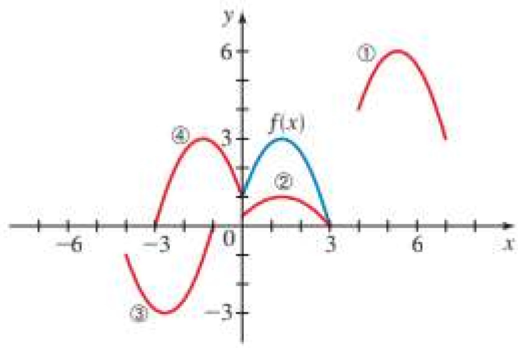
17. a) $y = f(x - 4)$ **b)** $y = f(x) + 3$

c) $y = 2f(x + 6)$ **d)** $y = -f(2x)$



18. **a)** $y = \frac{1}{3}f(x)$ **b)** $y = -f(x + 4)$

c) $y = f(x - 4) + 3$ **d)** $y = f(-x)$

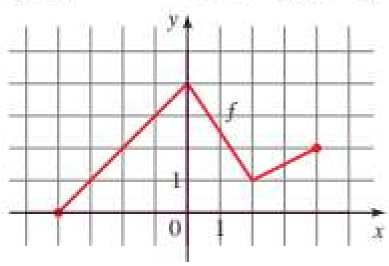


19. Se da la gráfica de f. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = f(x) - 2$

c) $y = 2f(x)$ **d)** $y = -f(x) + 3$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$

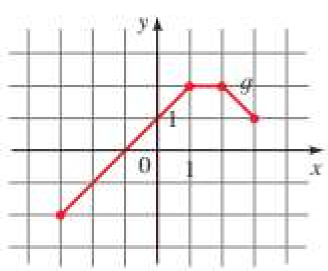


20. Se da la gráfica de g. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = g(x + 1)$ **b)** $y = -g(x + 1)$

c) $y = g(x - 2)$ **d)** $y = g(x) - 2$

e) $y = -g(x) + 2$ **f)** $y = 2g(x)$



Funciones cuadráticas: máximos y mínimos

Un valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un intervalo. Para una función que representa la ganancia en un negocio, se estaría interesado en el valor máximo; para una función que representa la cantidad de material en un proceso de manufactura, se estaría interesado en el valor mínimo. En esta sección se aprende cómo hallar los valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas y otras.

Grafica de funciones cuadráticas usando la forma estándar

Una **Función cuadrática es una función f de la forma**

$f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$.

En particular. Si se toma a =1 y b=c=0, se obtiene la función cuadrática simple

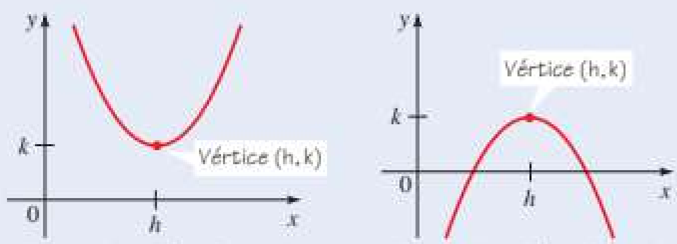
$$f(x) = x^2$$

Forma estándar de una función cuadrática

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k); la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

Ejemplo 1 Forma estándar de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

Solución

En la sección 1.5 se explica cómo completar el cuadrado.

a) Puesto que el coeficiente de x^2 no es 1, se debe factorizar este coeficiente a partir de los términos relacionados con x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en x} \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 2\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x-3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

$f(x) = 2(x-3)^2 + 5$

El vértice es (3, 5)

La forma estándar es $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$.

b) La forma estándar indica que la gráfica de f se obtiene tomando la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola por un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en $(3, 5)$ y la parábola abre hacia arriba. La gráfica se bosqueja en la figura 1 después de notar que el intersecto y es $f(0) = 23$.

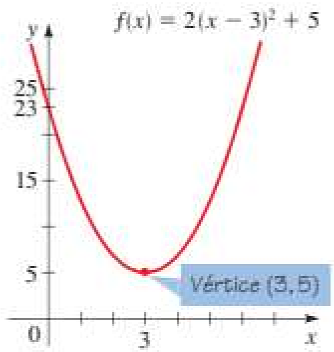


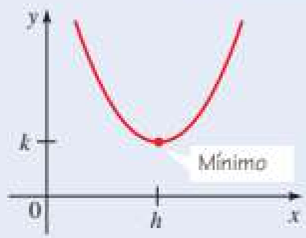
Figura 1

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

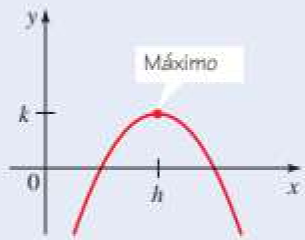
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 0 + k, a >$



$f(x) = a(x - h)^2 0 + k, a$

Ejemplo 2 Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

c) Halle el valor mínimo de f.

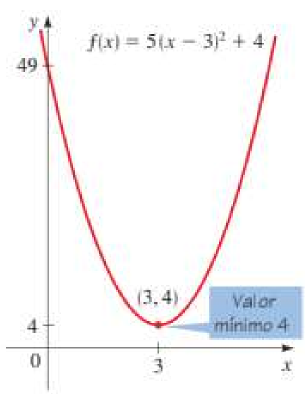


Figura 2

Solución

a) Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de los términos en x} \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

b) La gráfica es una parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba, como se bosqueja en la figura 2.

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$. ■

Ejemplo 3 Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

c) Encuentre el valor máximo de f.

Solución

a) Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice -1 de los términos en x} \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro del paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

b) De la forma estándar se puede observar que la gráfica es una parábola que abre hacia arriba y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, se encuentran las intersecciones. La intersección y es $f(0) = 2$. Para hallar las intersecciones con x, se establece $f(x) = 0$ y se factoriza la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 \\ -(x^2 - x - 2) &= 0 \\ -(x - 2)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Así, las intersecciones x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la figura 3.

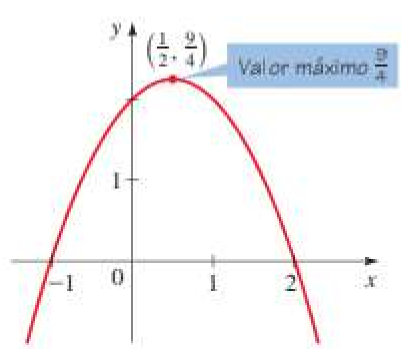


Figura 3
Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Expresar una función cuadrática en la forma estándar ayuda a bosquejar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si se está interesado sólo en hallar el valor máximo o mínimo, entonces hay una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{b^2}{4a^2} \text{ dentro del paréntesis, reste } \left(\tfrac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en la forma estándar con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Puesto que el valor máximo o mínimo ocurre en $x = h$, se tiene el resultado siguiente.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Taller N 7: Funciones cuadráticas: máximos y mínimos

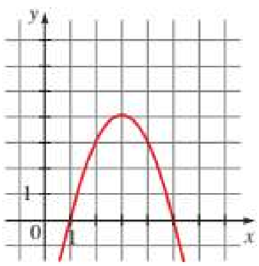
Realizar los siguientes ejercicios: 1,3,5,13,17.

1–4 ■ Se da la gráfica de una función cuadrática.

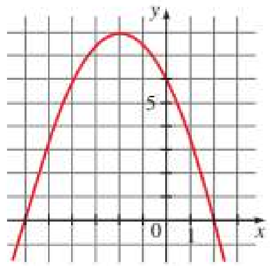
a) Determine las coordenadas del vértice.

b) Halle el valor máximo o mínimo de f.

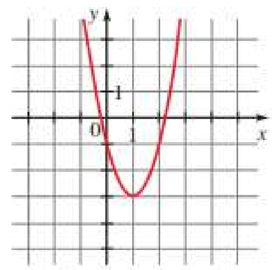
1. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



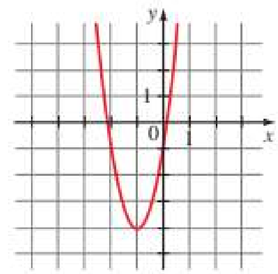
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



3. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



4. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



5–18 ■ Se da una función cuadrática.

a) Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

b) Halle su vértice y sus intersectos x y y.

c) Bosqueje su gráfica.

5. $f(x) = x^2 - 6x$

6. $f(x) = x^2 + 8x$

7. $f(x) = 2x^2 + 6x$

8. $f(x) = -x^2 + 10x$

9. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

10. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

11. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

12. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

13. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

14. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

15. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

16. $f(x) = 2x^2 + x - 6$

17. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$

18. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

ACTIVIDADES Y ESTRATEGIAS:

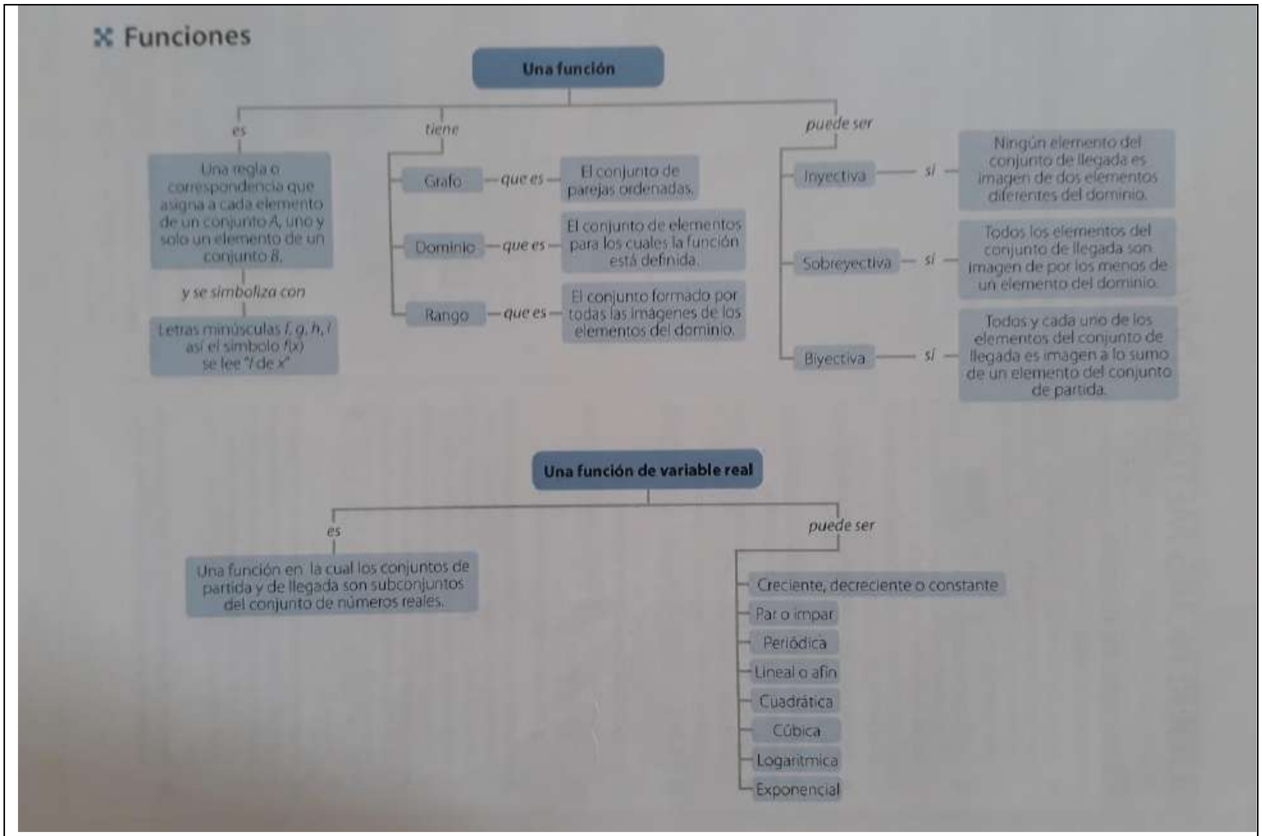
Las clases son fundamento para la comprensión de los conceptos, realizar los talleres propuestos en clase y en casa, dedicar el tiempo para estudiar.

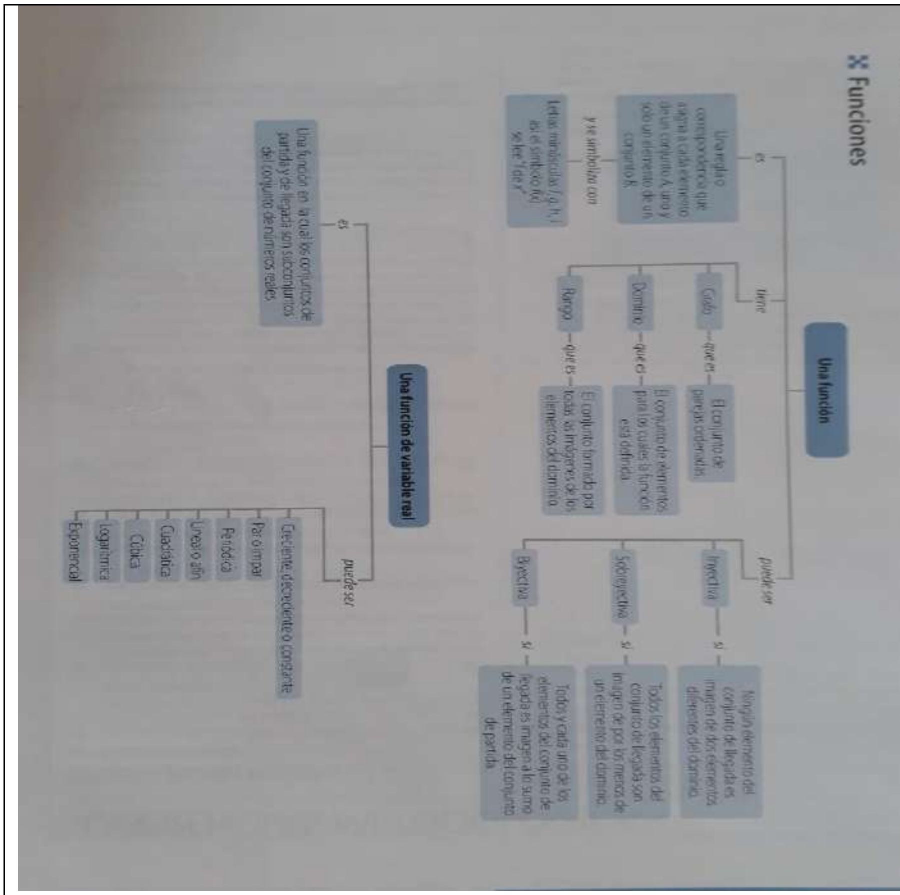
Poder compartir dentro de las clases, cono los compañeros y generar espacio para que puedan preguntar.

Libros que pueden usar para estudiar.

https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf

RECURSOS MATERIALES: **Precálculo, James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson Quinta edición.** **Guía didáctica** **Libro virtual** https://tecevolucion.files.wordpress.com/2018/01/matematicas-11c2ba-vamos-a-aprender.pdf **videos.** https://www.problemasyecuaciones.com/funciones/polinomica/problemas-resueltos-funcion-constante-lineal-cuadratica-cubica-cortes.html
EVALUACIÓN: **Talleres individual y en grupos.** **Evaluaciones para revisar los conceptos si fueron comprendidos y aprendidos.** **La actitud de los estudiantes en las clases, su puntualidad, presentar las excusas cuando falten a clase.**


Funciones
Una función
es
Una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A, uno y solo un elemento de un conjunto B.
y se simboliza con
Letras minúsculas f, g, h, i así el símbolo f(x) se lee "f de x"
tiene
Grafo
que es
El conjunto de parejas ordenadas.
Dominio
que es
El conjunto de elementos para los cuales la función está definida.
Rango
que es
El conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio.
puede ser
Inyectiva
sí
Ningún elemento del conjunto de llegada es imagen de dos elementos diferentes del dominio.
Sobreyectiva
sí
Todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por los menos de un elemento del dominio.
Biyectiva
sí
Todos y cada uno de los elementos del conjunto de llegada es imagen a lo sumo de un elemento del conjunto de partida.
Una función de variable real
es
Una función en la cual los conjuntos de partida y de llegada son subconjuntos del conjunto de números reales.
puede ser
Creciente, decreciente o constante
Par o impar
Periódica
Lineal o afín
Cuadrática
Cúbica
Logarítmica
Exponencial


Funciones
Una función
es
Una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A, uno y sólo un elemento de un conjunto B.
y se simboliza con
Letras minúsculas f, g, h, i así el símbolo f(x) se lee "f de x"
tiene
Grafo
que es
El conjunto de parejas ordenadas.
Dominio
que es
El conjunto de elementos para los cuales la función está definida.
Rango
que es
El conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio.
puede ser
Inyectiva
si
Ningún elemento del conjunto de llegada es imagen de dos elementos diferentes del dominio.
Sobreyectiva
si
Todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos de un elemento del dominio.
Biyectiva
si
Todos y cada uno de los elementos del conjunto de llegada es imagen a lo sumo de un elemento del conjunto de partida.
Una función de variable real
es
Una función en la cual los conjuntos de partida y de llegada son subconjuntos del conjunto de números reales
puede ser
Creciente, decreciente o constante
Par o impar
Periódica
Lineal o afín
Cuadrática
Cúbica
Logarítmica
Exponencial